

Een uitdagende opleidingscontext voor rekenen-wiskunde

Vahap Duman & Ronald Keijzer, Hogeschool iPabo, Amsterdam/Alkmaar

Samenvatting | *Lerarenopleidingen basisonderwijs vragen van hun studenten om verschillen tussen leerlingen vooral als kans te zien om leerlingen van en met elkaar te laten leren. Wanneer je als opleiding model wilt staan voor deze beoogde praktijk, betekent dit dat je ook in de lerarenopleiding differentiatie aangrijpt om het leren te bevorderen. Dat is wat er bij de Hogeschool iPabo gebeurde. Omdat we grote verschillen tussen studenten zagen bij het vak rekenen-wiskunde en merkten dat sterke rekenaars zich nogal eens verveelden, gingen we met deze sterke rekenaars in gesprek om na te gaan hoe we voor hen de opleiding uitdagend konden maken. Na afloop van deze gesprekken formuleerden wij voor onszelf een opleidingsdidactische opdracht, waarvan wij positieve leereffecten verwachtten voor zowel de sterkere als minder sterke rekenaars. We vroegen twee sterke rekenaars een bijeenkomst voor hun medestudenten te verzorgen rond een van de onderwerpen uit de kennisbasis rekenen-wiskunde. We laten zien hoe de sterk rekenende studenten met deze opdracht aan de slag gingen en hoe zowel de sterke rekenaars als hun minder sterk rekenende groepsgenoten hiervan leerden.*

Inleiding

Studenten van de lerarenopleiding basisonderwijs merken het meteen als ze voor de eerste keer hun stageschool binnengaan: er zijn grote verschillen tussen leerlingen, bijvoorbeeld als het gaat om hoe ze omgaan met de leerstof voor de basisschool. Ze zien onder andere sterke rekenaars, leerlingen die hoge scores halen op rekentoetsen, die alles meteen snappen en sommen snel maken. Daarnaast zien ze zwakke rekenaars, die minder hoog scoren op rekentoetsen en die telkens extra aandacht nodig hebben om het tempo van de groep bij te houden. Lerarenopleiders leren studenten over deze differentiatie in het basisonderwijs. Ze geven aan dat de verschillen tussen leerlingen niet zozeer een probleem hoeven zijn, als wel een startpunt vormen om leerlingen van en met elkaar te laten leren. Sterke rekenaars leren bijvoorbeeld als zij hun efficiënte rekenaanpakken uitleggen aan zwakkere rekenaars, waar de zwakkere rekenaars vervolgens ook van leren.

Lerarenopleidingen willen op de opleiding ook in de didactische aanpak van de opleider laten zien wat zij voorbeeldmatig gedrag in de basisschool vinden. Dit betekent dat zij willen tonen hoe je ook binnen de opleiding passend gebruik kunt maken van differentiatie in de studentengroep, bijvoorbeeld als de ene student sterk is in rekenen-wiskunde, terwijl de andere daar problemen mee heeft. Dat neemt niet weg dat opleidingen vaak geen passend gebruik maken van verschillen tussen studenten ten bate van het leren van alle studenten (Geerdink & Derks, 2007; Van der Laan, Rook, & Kaskens, 2013).

In dit artikel richten we ons specifiek op differentiatie in het opleidingsonderwijs rekenen-wiskunde op de lerarenopleiding basisonderwijs. Een aspect waarop studenten verschillen is namelijk hun reken-wiskundige vaardigheid. Aan deze vaardigheid worden sinds kort in Nederland aanvullende eisen gesteld en omdat studenten aan de nieuwe eisen willen voldoen,

worden de verschillen tussen studenten in dit opzicht nadrukkelijk zichtbaar (Keijzer, 2015). Studenten die sterk zijn in rekenen-wiskunde, en die we hier kort aanduiden als sterke rekenaars, vervelen zich soms in de reken-wiskundeles op de opleiding, omdat ze al bekend zijn met de aangeboden vak kennis of weinig moeite hebben die te verwerven. Ze willen daarom graag uitgedaagd worden en hebben goede ideeën hoe ze dit voor zich zien (Duman, 2015).

Hier gaat het om een dergelijk idee dat ons door sterke rekenaars op de Hogeschool iPabo is aangedragen. We beschrijven een situatie waarin twee sterke rekenaars uit het tweede studiejaar een bijeenkomst voorbereiden en verzorgen voor de rest van de groep. Het onderwerp van die bijeenkomst is het rekenen met binaire getallen, wat een onderdeel is van de kennisbasis rekenen-wiskunde en in de landelijke kennisbasistoets rekenen-wiskunde getoetst wordt (Van Zanten, Barth, Faarts, Van Gool, & Keijzer, 2009; Keijzer, Garssen, & Peijnenburg, 2012; Vakcommissie rekenen-wiskunde, 2013).

Binaire getallen

Een van de zaken die leerlingen op de basisschool leren bij het vak rekenen-wiskunde is dat getallen zoals wij die kennen positioneel zijn opgebouwd. Dat wil zeggen dat 13 en 31 twee verschillende getallen zijn, omdat de '3' in 13 staat voor 'drie énen' en in 31 staat voor 'drie tienens'. Dat dit voor leerlingen moeilijk kan zijn, zijn studenten zich niet altijd bewust. Dat realiseren zij zichzelf vaak wel als zij zelf min of meer opnieuw leren rekenen in een ander talstelsel (Goffree, 1979). Een dergelijk talstelsel is het binaire talstelsel, waar bij het schrijven van getallen uitsluitend de symbolen 0 en 1 worden gebruikt.

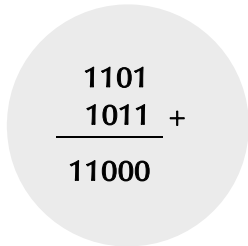
Overwegingen bij het inrichten van een leeromgeving

We zien dat sterke rekenaars, daar waar het gaat om inzet en inbreng in het opleidingsonderwijs rekenen-wiskunde, kenmerken hebben die in het algemeen toegeschreven worden aan excellente studenten. Het gaat om studenten die sneller leren en meer weten. Ze vervelen zich in het onderwijs dat is afgestemd op de gemiddelde student. Deze studenten kunnen uitgedaagd worden door in het opleidingsonderwijs te kiezen voor: een grote complexiteit in opdrachten waar ze voor gesteld worden, autonomie voor de studenten en hoge verwachtingen van de docent. Bij dit laatste gaat het om een mate van uitdaging die de door de studenten zelf ingeschatte competentie overstijgt (Scager, Akkerman, & Pilot, 2014). Verder willen talentvolle studenten meer mogelijkheden om flexibel met opdrachten om te gaan en ruimte voor eigen inbreng als ze bezig zijn met gegeven opdrachten. Het gaat hierbij overigens in het algemeen om open opdrachten. De flexibiliteit zit vooral in het zelf indelen van de tijd, werkvormen en in de vrijheid voor studenten om het onderwijs zelf te sturen en richting te geven (Wolfensberger, 2012). We zoeken voor deze studenten een open opdracht die een appèl doet op de hogere denkniveaus van deze studenten, zoals analyseren, evalueren en creëren, een hoog abstractieniveau heeft en een hoge mate van complexiteit biedt (Krathwohl, 2002). De opdracht doet, zo is de bedoeling, een beroep op de creativiteit en de onderzoekende houding van deze studenten. We richten de opdracht ook zo in dat deze een reflectieve houding van deze studenten vraagt (De Boer & Booij, 2010).

Met deze zaken in het achterhoofd formuleerden we de opdracht voor een tweetal excellente

rekenaars om een bijeenkomst voor de eigen groep te verzorgen rond binaire getallen. Het zou daarbij om een bijeenkomst moeten gaan, die de studenten met inzicht leren rekenen met binaire getallen en waarbij ook het vakdidactisch perspectief niet uit het oog verloren wordt. De studenten krijgen de opdracht om zelf materialen te zoeken en activiteiten te ontwikkelen. Ze worden hierbij ondersteund in begeleidingsgesprekken. Dringende vragen kunnen ook per e-mail gesteld worden. Die ondersteuning laat zich kenschetsen als scaffolding, adaptieve ondersteuning daar waar die nodig is. Zo bieden we gericht de ondersteuning die de studenten nodig hadden om deze complexe taak aan te kunnen (Frey & Fisher, 2010; Kool & Keijzer, 2015). Bij de gegeven ondersteuning staat daarnaast de gedeelde verantwoordelijkheid voor de inhoud en de kwaliteit van het opleidingsonderwijs centraal.

Het doel van het opleidingsonderwijs rondom het onderwerp binaire getallen is dat alle studenten leren rekenen in het binaire getallenstelsel en dat ze dat zo leren dat dit reflectie op het leren van kinderen in de basisschool mogelijk maakt. Immers deze leerlingen moeten in de basisschool ook greep krijgen op een positioneel getallenstelsel. De lat ligt hoger voor sterke rekenaars die studenten hierbij begeleiden. Zij moeten het rekenen in het binaire stelsel zo (leren) doordenken, dat zij deze kennis vertalen in activiteiten voor medestudenten. Het gaat hierbij bijvoorbeeld om het kunnen representeren van binaire getallen op verschillende manieren en ook om activiteiten zo vorm te geven, dat de andere studenten niet snel zullen kiezen voor het instrumenteel rekenen met binaire getallen.


$$\begin{array}{r} 1101 \\ 1011 \\ \hline 11000 \end{array}$$

Ontwikkeling studenten

Twee sterke rekenaars, Dyonne en Esther willen met de opdracht aan de slag. We vertellen ze dat het de bedoeling is dat zij een bijeenkomst voor hun eigen jaargroep ontwerpen en uitvoeren rond het onderwerp binaire getallen. We geven ze aan dat dit betekent dat zij zich verdiepen in het onderwerp binaire getallen en dat wij van ze verwachten dat zij de te ontwikkelen bijeenkomst zo inrichten dat hun medestudenten na de bijeenkomst kennis hebben van binaire getallen, zoals die in de kennisbasis rekenen-wiskunde is beschreven en in de toetsgids voor de landelijke kennisbasistoets is vastgelegd (Van Zanten, Barth, Faarts, Van Gool, & Keijzer, 2009; Vakcommissie rekenen-wiskunde, 2013). Wij spreken af dat Dyonne en Esther ons op korte termijn laten zien hoe zij de bijeenkomst voor zich zien.

Die opzet voor de bijeenkomst ontvangen we drie weken voordat deze zou plaatsvinden. In deze eerste opzet stellen Dyonne en Esther voor om te beginnen met een opdracht om de voorkennis van de medestudenten op te halen. Dit lieten ze volgen door een uitleg over het binair cijferend optellen, waarbij de getallen onder elkaar staan en via een standaardwerkwijze het antwoord van de optelling bepaald wordt. Verder willen ze in de bijeenkomst binaire kommagetallen introduceren, en aandacht besteden aan binaire getallen die bestaan uit veel cijfers. Ze stellen verder voor de bijeenkomst af te sluiten met een spel in het binair systeem.

Wij merken dat Dyonne en Esther in hun voorstel het leren rekenen met binaire getallen nogal instrumenteel opvatten. Ze laten zien hoe er stap voor stap gerekend zou moeten worden met binaire getallen en kiezen er daarbij voor om dit systeem snel uit te breiden. Ze kiezen ervoor

om pas in de afsluiting van de bijeenkomst in te gaan op de betekenis van binaire getallen. Die betekenis zou, zo was de opzet, op dat moment door de andere studenten geconstrueerd worden.

We gaan het gesprek aan met de studenten, vanuit het perspectief dat de kwaliteit van de bijeenkomst een gedeelde verantwoordelijkheid is van deze sterke rekenaars en onszelf, hun opleiders. We geven aan dat wij het betekenis geven aan binaire getallen liever van meet af aan centraal zouden willen stellen. We geven ook aan waarom we dit voorstellen. Het doel van de bijeenkomst zou in onze ogen moeten zijn dat studenten inzicht krijgen in binaire getallen. We stellen de ontwikkelaars van de bijeenkomst daarom ook voor om na te gaan of ze kans zagen de binaire getallen als onderzoeksgebied voor de medestudenten te introduceren, om zich zo te richten op inzicht in dit getalsysteem. We doen daarvoor enkele concrete suggesties, zoals het verkennen van het aantal verschillende codes dat je kunt maken met drie lampjes, die afwisselend aan en uit staan. Een dergelijke opdracht zou er namelijk toe leiden, zo brengen we naar voren, dat studenten de essentie van binaire getallen in de codes met de lampjes zouden herkennen. We benadrukken dat we van de studenten verwachten dat ze serieus met onze inbreng om zouden gaan, maar dat we van ze verwachten dat ze daarin vooral ook eigen overwegingen maken, zolang ze die overwegingen maar overtuigend onderbouwen.

Een week voor de bijeenkomst ontvangen we de tweede opzet van Dyonne en Esther. Ze reageren daarbij op onze oproep om zich te richten op de wiskundige essentie van binaire getallen. Ze willen daaraan gehoor geven, maar kiezen wel een eigen invulling. Ze willen namelijk voortbouwen op wat de medestudenten al weten. Daarbij gaat het om instrumentele kennis en daarom kiezen ze er bijvoorbeeld voor wel aandacht te besteden aan het omrekenen van binaire getallen naar decimale getallen en omgekeerd. Maar daarnaast willen ze aandacht besteden aan de ontstaansgeschiedenis van binaire getallen en in het verlengde daarvan bespreken waarom



Figuur 1. Het binaire getal 011001 uitbeelden door zitten en staan.

dit stelsel nodig is, om zo uit te komen bij de wiskundige essentie van binaire getallen. Daarnaast ontwikkelden ze een spel waarin de medestudenten een binair getal gaan uitbeelden door zitten en staan (Figuur 1).

Dyonne en Esther beginnen de bijeenkomst met het binair rekenen van computers. Het gaat daarbij eigenlijk om een heel groot aantal lampjes dat aan of uit staat. Deze introductie vormt de brug naar het zoeken van het aantal aan-uit-combinaties dat mogelijk is met drie lampjes. Met het schematiseren hiervan leiden Dyonne en Esther hun medestudenten naar het noteren van binaire getallen.

Ze laten de andere studenten vervolgens enkele opgaven met binaire getallen maken. Daarbij begeleiden ze de groep en nemen hun medestudenten in de bespreking mee in het redeneren binnen het binaire stelsel. Dat doen ze aan de hand van het 'onder elkaar optellen': 'In plaats van dat je alles eerst om gaat zetten naar het tientallig stelsel en daarna je antwoord in het binair stelsel omzet, kun je meteen alles cijferend berekenen. Als je twee keer 1 onder elkaar hebt en die dus moet optellen, dan heb je 2. Maar '2' bestaat niet, omdat dit het tweetallig systeem is. Het is '10' en daarom noteren we één '0' en '1' schuift naar de volgende positie, zoals in het tientallig systeem.' Aldus raakten ze de essentie van positionele getallenstelsels, zoals wij naar voren brachten in het voorbereidingsgesprek met de studenten. We merkten dat ook andere studenten mee gingen in dit denken: 'Dus als je overal 1'tjes hebt dan heb je eentje minder dan een macht van 2 van dat getal, want binair reken je $111111 = 1000000 - 1$ en dat laatste staat voor $2^6 - 1$.

We vergelijken de voorbereiding van de twee sterke rekenaars met wat we observeerden tijdens de bijeenkomst. Die vergelijking vormt een natuurlijke start van de nabespreking die we met de twee ontwerpers en uitvoerders van de bijeenkomst hebben. Dyonne en Esther weten goed te formuleren waarom ze van hun plan zijn afgeweken: 'We wilden met de andere studenten de overgang maken van instrumenteel rekenen naar het doen van ontdekkingen binnen het binaire stelsel. We zagen de studenten dergelijke ontdekkingen doen en daarop wilden we doorgaan. We kozen er daarom voor de volgorde van activiteiten te veranderen.' Ze geven aan dat ze de studenten hierbij ondersteunden door onder elkaar te gaan rekenen met binaire getallen, omdat de studenten zo binnen het binaire stelsel bleven, maar ondertussen wel hun ervaringen met dergelijke bewerkingen met getallen in het tientallige getallenstelsel konden inzetten.

De studenten vinden het verzorgen van een bijeenkomst voor medestudenten een mooie ervaring en zagen tal van mogelijkheden om met de groep verder op avontuur te gaan met binaire getallen. Ze grepen daarbij terug op de kommagetallen die ze voor deze ene bijeenkomst hadden laten schieten. Dat zou in hun ogen een mooi vervolg zijn geweest, maar omdat de afspraak was dat het om een bijeenkomst ging, bleef het hier bij plannen.

Terugblik

We gaven aan dat we sterk rekenende studenten in het opleidingsonderwijs op maat wilden bedienen. Deze studenten zijn reken-wiskundig sterker dan de medestudenten en willen daarom op een andere manier uitgedaagd worden voor rekenen-wiskunde. We beschreven hoe twee studenten aan de slag gingen met het voorbereiden en uitvoeren van een bijeenkomst in het opleidingsonderwijs. We zagen dat de gestelde opdracht ze laat nadenken over de essentie

van binaire getallen en ook hoe je dat onderwijst op de lerarenopleiding. De sterke rekenaars gingen met hun opleider de discussie aan over het verwerven van inzicht in de onderliggende wiskunde tegenover het instrumenteel rekenen met binaire getallen. Zij kozen er daarbij voor om de opleiders niet zo maar te volgen in hun redenering, maar zetten hier hun eigen ideeën tegenover, namelijk dat het goed is aan te sluiten bij de beginsituatie van studenten. De twee sterke rekenaars bleken in staat om een eigen invulling voor de bijeenkomst te kiezen en die in de uitvoering aan te passen aan hun medestudenten, waarbij ze de ontwikkeling van de medestudenten van instrumenteel redeneren naar het verwerven van inzicht meewogen.

We hadden ook een doel met de rest van de groep. Deze studenten moesten tijdens deze bijeenkomst inzicht verwerven in binaire getallen en zich daardoor bewust worden van essenties van positionele getallensystemen, zoals het tientallige getallensysteem. Dat willen we bereiken, omdat dit de studenten voorbereidt op het onderwijzen van kinderen, die het positionele karakter van het tientallige getallenstelsel op hun beurt moeten leren doorzien. We merkten aan de reacties van de studenten dat ze zich hiervan al doende bewust werden.

De sterke rekenaars kozen ervoor aan te sluiten bij de beginsituatie van hun medestudenten.

We wilden laten zien hoe een relatieve eenvoudige ingreep als het laten overnemen van een klein deel van het opleidingsonderwijs door sterke rekenaars een middel is om tegemoet te komen aan de terechte wens van sterke rekenaars onder de studenten om onderwijs op maat te krijgen. We proefden enthousiasme bij de studenten die de bijeenkomst verzorgden, en ook bij de andere studenten. En verder lieten we zien dat differentiëren ingevuld kan worden door sterke rekenaars een specifieke rol te geven in het onderwijs. En dat laatste geldt ook voor de basisschool (vgl. Hotze, Van Dijk, Visser, & Keijzer, 2015).

Referenties

- De Boer, E., & Booi, N. (2010). *Excellentie in ontwikkeling*. 's-Hertogenbosch: KPC Groep.
- Duman, V. (2015). Sterke rekenaars op de iPabo - een differentiatievraagstuk.. *Reken-wiskunde-onderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 2-11.
- Frey, N., & Fisher, D. (2010). Motivation Requires a Meaningful Task. *English Journal*, 100(1), 30-36.
- Geerdink, G., & Derks, M. (2007). Attent op talent op de pabo. *Tijdschrift voor lerarenopleiders*, 28(2), 4-13.
- Goffree, F. (1979). *Leren onderwijzen met wiskobas: onderwijsontwikkelingsonderzoek 'wiskunde en didactiek' op de pedagogische akademie*. Utrecht: IOWO.
- Hotze, A., Van Dijk, G., Visser, C., & Keijzer, R. (2015). Een uitdaging voor de hele groep. *Volgens Bartjens*, 34(5), 28-30.
- Keijzer, R. (2015). Changing the pass mark for the mathematics entrance test. In G. Makrides (Red.), *EAPRIL Conference Proceedings 2014* (pp. 254-269). Nicosia, Cyprus: EAPRIL. Opgehaald van https://eaprilconference.files.wordpress.com/2014/07/eapril-2014-proceedings_issn-aanvraag_def1.pdf
- Keijzer, R., Garssen, F., & Peijnenburg, A. (2012). Greep krijgen op de toetsing van de Kennisbasis rekenen-wiskunde. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 31(1), 14-22.
- Kool, M., & Keijzer, R. (2015). Excellentie op de pabo, balans tussen uitdagen en ondersteunen. *Tijdschrift voor lerarenopleiders*, 36(2), 47-59.
- Krathwohl, D. (2002). A Revision of Bloom's Taxonomy: An Overview. *Theory into practice*, 41(4), 212-218.
- Scager, K., Akkerman, S., & Pilot, A. (2014). Dilemma's van docenten bij het uitdagen van excellente studenten. In J. van Tartwijk,

- M. Brekelmans, P. den Brok, & T. Mainhard, *Theorie en praktijk van leren en de leraar* (p. 127). Amsterdam: Uitgeverij SWP.
- Vakcommissie rekenen-wiskunde. (2013). *Toetsgids pabo rekenen-wiskunde*. Den Haag: Vereniging Hogescholen.
- Van der Laan, M., Rook, M., & Kaskens, J. (2013). Sterke rekenaars uitdagen. *JSW*, 97(6), 6-9.
- Van Zanten, M.A., Barth, F., Faarts, J., Van Gool, A., & Keijzer, R. (2009). *Kennisbasis Rekenen-Wiskunde voor de lerarenopleiding basis-onderwijs*. Den Haag: HBO-raad.
- Wolfensberger, M.V. (2012). *Teaching for excellence: Honours pedagogies revealed*. Academisch proefschrift. Münster, Duitsland: Waxman.

